Momentul forţei. Momentul cinetic.

1. Momentul forţei.

Momentul forţei este o mărime fizică vectorială care măsoară efectul de rotaţie pe care îl poate avea acţiunea unei forţe asupra unui corp. Să considerăm exemplul din Fig. 1. Corpul din figură are o axă de rotaţie şi am considerat un punct O pe această axă. Asupra corpului acţionează o forţă $\vec{F}$ a cărei punct de aplicaţie este precizat de vectorul de poziţie $\vec{r}$.

Prin definiţie <u>momentul unei forţe în raport cu un punct O</u> este mărimea fizică vectorială definită de următorul produsul vectorial:

$$\overrightarrow{M_F}(O) = \vec{r} \times \vec{F}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul care precizează punctul de aplicaţie al forţei faţă de punctul O iar $\vec{F}$ este vectorul forţă.

Momentul forţei fiind o mărime vectorială este caraterizat de:

- ***Modul***
  $M_F(O) = rF sin\alpha$ *, unde α este unghiul dintre r şi F*

- ***Direcţie** – direcţia este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{F}$*
- ***Sens** - Sensul este dat de regula burghiului drept sau regula mâinii drepte (sensul de înaintare al burghiului drept rotit astfel încât să suprapunem primul vector din prodului vectorial (1), adică vectorul $\vec{r}$, peste al doilea vector, adică vectorul $\vec{F}$.*

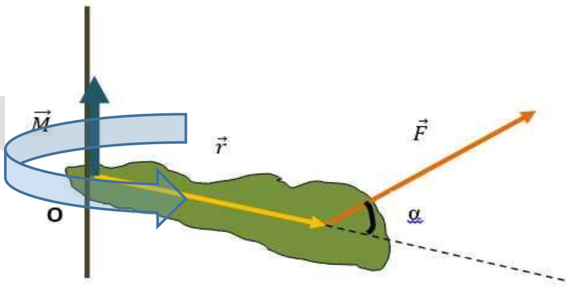

Figura 1

$$[M]_{SI} = N \cdot m$$

Dacă unghiul dintre vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{F}$ este 0 sau 180 atunci prodului vectorial este zero, prin urmare momentul este zero. Acest fapt înseamnă că acţiunea acestor forţe nu poate determina rotaţia corpului (Fig.2).

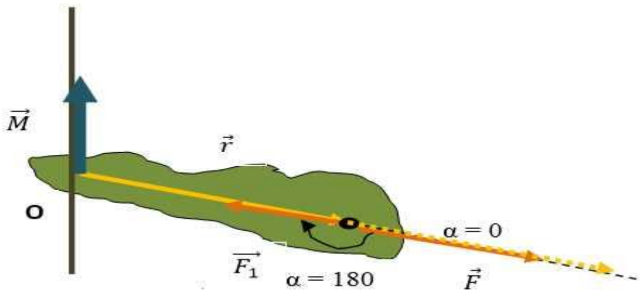

Figura 2

Mai multe despre cum se calculează produsul vectorial a doi vectori găsiţi în materialul despre „Vectori”.

Exemplu

Tija din figura 3 care are un punct faţă de care se poate roti, punctul O, este acţionată de două forţe $\vec{F_1}$ respectiv $\vec{F_2}$. Punctele de aplicaţie ale acestor forţe în raport cu punctul O sunt reprezentate de vectorii de poziţie $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$.

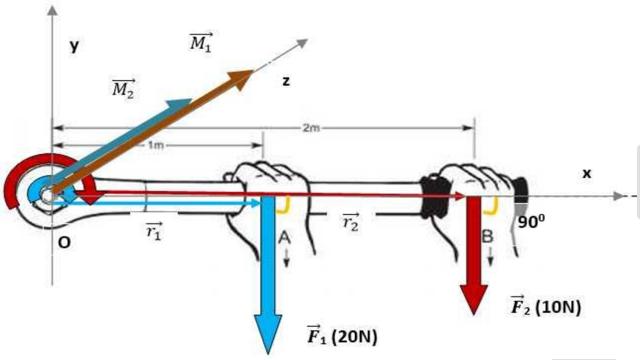

Figura 3

Momentul forţei $\vec{F_1}$ faţă de punctul O:

$$\overrightarrow{M_{F1}}(O) = \vec{r_1} \times \vec{F_1}$$

$$M_{F1} = r_1 F_1 sin90 = r_1 F_1 = 20Nm$$

Momentul forţei $\vec{F_2}$ faţă de punctul O:

$$\overrightarrow{M_{F2}}(O) = \vec{r_2} \times \vec{F_2}$$

$$M_{F2} = r_2 F_2 sin90 = r_2 F_2 = 20Nm$$

Momentul rezultant este:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \overrightarrow{M_{F1}}(O) + \overrightarrow{M_{F2}}(O)$$

$$M = M_{F1} + M_{F2} = 40Nm$$

2. Momentul cinetic.

Momentul cinetic este momentul impulsului. *Momentul cinetic* al unui punct material în raport cu un punct ***O*** arbitrar este mărimea fizică vectorială definită de următorul produs vectorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$[L]_{SI} = kg \cdot \frac{m^2}{s} = Js$$

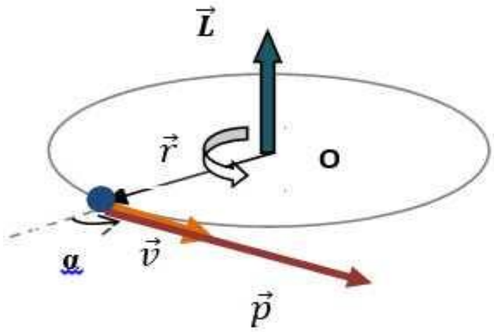

Figura 4

Unde $\vec{r}$ reprezintă vectorul de poziţie al punctului material în raport cu punct ***O*** faţă de care se calculează momentul, $\vec{p} = m\vec{v}$ reprezintă impulsul punctului material.

Momentul cinetic fiind mărime vectorială are următoarele caracteristici:

- Modulul $L = rmvsin\alpha$, dacă $\vec{r} \perp \vec{p}$ atunci $\sin \propto = \sin 90 = 1$ şi $L = rmv$.
- Direcţia vectorului $\vec{L}$ este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{p}$.
- Sensul vectorului $\vec{L}$ este dat de regula burghiului drept (Fig.4)

Teorema de variaţie a momentului cinetic pentru punctul material

Dacă se calculează derivata momentului cinetic în raport cu timpul obţinem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = (\vec{v} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \vec{F}) = \overrightarrow{M_F}(O)$$

Deoarece $\vec{v} \times \vec{p} = 0$, Deci:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M_F}(O) \quad (1)$$

*Variaţia momentului cinetic al unui punct material în raport cu un punct oarecare **O** este egală cu momentul forţei rezultante aplicate punctului material în raport cu acelaşi punct.*

Relaţia (1) reprezintă teorema de variaţie a momentului cinetic pentru punctul material. Semnificaţia acestei teoreme este aceea că pentru a modifica momentul cinetic al unei particule momentul forţei rezultante care acţionează asupra ei trebuie să fie diferit de zero.

Legea de conservare a momentului cinetic pentru punctul material

Dacă momentul forţei rezultante este zero $\overrightarrow{M_F}(O) = 0$ atunci $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, rezultă $\vec{L} = constant$. Adică momentul cinetic se conservă (nu se modifică în timp).

<u>Exemple de conservare a momentului cinetic</u>

1. Dacă se consideră o bilă de masă neglijabilă care se roteşte rapid în plan orizontal forţa care intreţine mişcare de rotaţie a bilei este tensiunea în fir. Momentul forţei de tensiune în fir în raport cu centru faţă de care are loc rotaţia este zero deoarece tensiunea din fir are aceeaşi direcţie cu vetorul de poziţie $\vec{r}$.

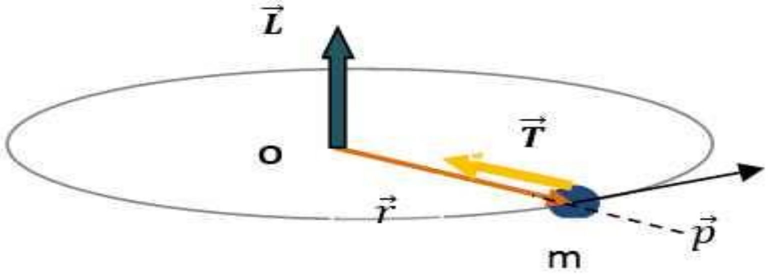

Figura 5

2. O patinatoare care execută piruete atunci când doreşte să îşi mărească viteza de rotaţie îşi apropie mâinile de corp iar când doreşte să îşi micşoreze viteza îşi indepărtează mâinile de corp.

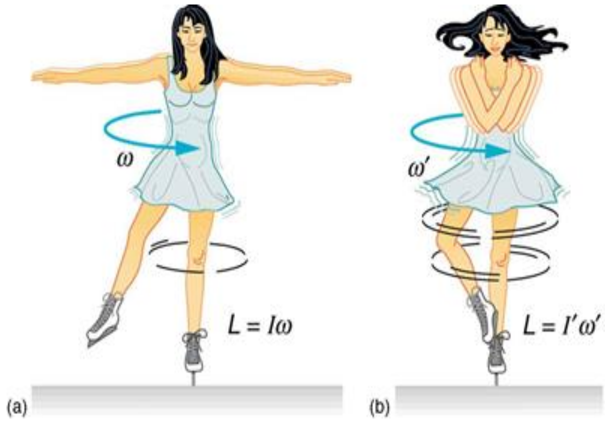

Figura 6

Momentul cinetic rămâne constant în cazurile a) si b) deoarece nici o forţă exterioară nu determină un moment al forţei care să influenţeze modificarea momentului cinetic.

Prin apropierea mâinilor de corp (cazul b) se modifică modul în care este distribuită masa ceea ce este măsurat de momentul de inerţie notat cu $\boldsymbol{I}'$ pe figură. În cazul b) momentul de inerţie scade ceea ce determină implicit creşterea vitezei unghiulare ω' , momentul cinetic $\boldsymbol{L}$ trebuind să rămână constant.

Când îşi îndepărtează mâinile de corp (cazul a) creşte momentul de inerţie şi în compensaţie trebuie să scadă viteza unghiulară, momentul cinetic fiind identic cu cel din situaţia b).