**2.11 Oscilațiile armonice**

Fie un corp de masă $m$ prins de un perete vertical prin intermediul unui resort şi care se poate mişca pe planul orizontal fără frecare (fig.2.8).

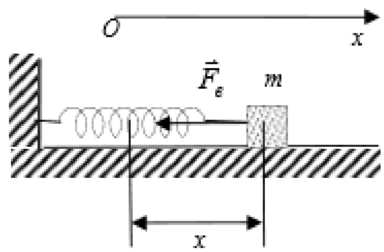


**Fig.2.8** Mişcarea oscilatorie armonică.

Presupunem că forța de rezistență din partea mediului înconjurător este neglijabilă. Scoatem corpul din poziția de echilibru şi îl lăsăm liber. El se va mişca de o parte şi de alta a poziției sale de echilibru efectuând o mişcare oscilatorie armonică. Mişcarea este determinată de apariția în resort a unei forțe elastice de revenire, $\vec{F}_e$.

***Mişcarea oscilatorie armonică*** *constă în deplasarea unui obiect de-a lungul unei axe sub acțiunea unei forțe elastice.* Distanța x la care se afla obiectul la un moment dat față de poziția de echilibru se numeşte ***elongație***. Elongația maximă reprezintă ***amplitudinea*** mişcării oscilatorii armonice (notată cu A). Elongația şi amplitudinea se măsoară în metri.

Pentru a afla ecuația de mişcare a oscilatorului armonic scriem ecuația principiului II al dinamicii

$$F_e = ma \qquad (2.41)$$

Deoarece mişcarea oscilatorie armonică este produsă de o forța elastică, egalăm expresia (2.42) cu expresia forței elastice ($F_e$=-kx unde k este constanta elastică iar x este elongația mişcării oscilatorii armonice)

$$ma + kx = 0 \qquad (2.42)$$

sau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (2.43)$$

Înmulțind relația anterioara cu $\frac{1}{m}$ şi notând $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ecuația (2.43) devine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (2.44)$$

Această relație este o ecuație diferențială de ordinul 2, omogenă. Soluția ei este elongația oscilatorului armonic, *x(t)*, o funcție care depinde de timp.

Ecuația (2.44) se numeşte ***ecuația mişcării oscilatorului armonic*** (sub forma diferențială).

Pentru a rezolva ecuația (2.44) avem nevoie de o funcție a cărei a doua derivată trebuie să fie egală cu funcția însăşi, cu semnul minus, cu excepția factorului constant $\omega$. Să observăm faptul că o asemenea proprietate o au funcțiile sinus şi cosinus

$$\frac{d^2}{dt^2}(cost) = -cost$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(sint) = -sint \qquad (2.45)$$

Evident, rezultatul nu se modifică dacă înmulțim funcția sinus/cosinus, cu o constantă, A. Astfel, o soluție a ecuației (2.45) ar putea fi de forma

$$x = Asin(\omega t + \varphi) \qquad (2.46)$$

Astfel, am găsit o soluție generală (2.46) pentru ecuația (2.46), soluție în care constantele $A$ și $\varphi$ (amplitudinea și faza inițială a mișcării) sunt necunoscute. Menționăm faptul că relația (2.46) reprezintă și ea ***ecuația mișcării oscilatorului armonic*** (sub forma integrală).

Pentru rezolvarea ecuației (2.44) se pune acum problema determinării parametrilor $A$ și $\varphi$ care apar în soluția generală (2.46).

Să observăm mai întâi faptul că derivând ecuația (2.46) în raport cu timpul o dată, respectiv de două ori, obținem expresiile pentru viteza, respectiv accelerația oscilatorului armonic

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2.47)$$

Pentru a determina constantele A si $\varphi$ trebuie să cunoaștem condițiile inițiale ale mișcării oscilatorii armonice – elongația initiala ($x_0$) și viteza inițială ($v_0$). Impunem aceste condiții elongației (2.46) și vitezei (2.47) și obținem un sistem de 2 ecuații

$$x_0 = A\sin\varphi$$
$$v_0 = A\varpi\cos\varphi \qquad (2.47)$$

pe care il rezolvăm. Aflăm astfel constantele A și $\varphi$, adică determinăm soluția ecuației (2.44).

Observăm că valorile soluției (2.46) se repetă după un număr întreg al intervalului de timp $2\pi/\omega$, deci $2\pi/\omega$ reprezintă perioada $T$ a mișcării. Putem astfel scrie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \qquad (2.48)$$

Cantitatea $\omega$, despre care am discutat și la relația (2.43) poartă numele de ***frecvență unghiulară*** (sau ***pulsația proprie***) a mișcării oscilatorii armonice și este independentă de amplitudine. Cantitatea $\omega t + \varphi$ reprezintă ***faza mișcării***, iar $\varphi$ este ***faza inițială a mișcării***.

În fig.2.9 este redată reprezentarea grafică a legii de mișcare a oscilatorului liniar armonic (2.47) pentru cazul $\varphi_0=0$.

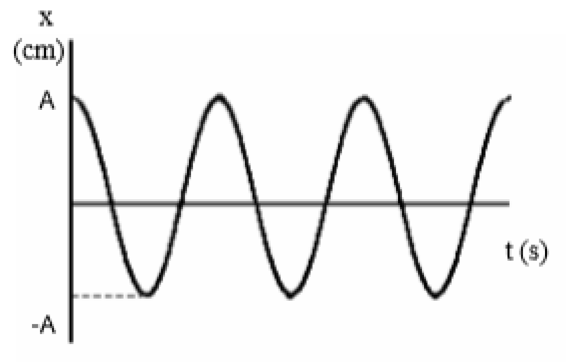


**Fig.2.9** Variația în timp a elongației în mişcarea oscilatorie armonică.

Derivând legea de mişcare (2.46) în raport cu timpul o dată respectiv de două ori obținem viteza, respectiv accelerația oscilatorului armonic

$$\begin{aligned} v &= A\omega\cos(\omega t+\varphi) \\ a &= -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Energia cinetică ($E_c$), energia potențială ($U$) şi energia totală *(E)* a oscilatorului armonic sunt date de relațiile

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ U &= \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E &= E_c+U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Energia totală pentru un oscilator armonic se se conservă. După ce a început mişcarea armonică, obiectul va oscila cu amplitudine, fază şi frecvență constante.

Energia potențială a mişcării oscilatorii armonice se reprezintă printr-o parabolă, iar forța elastică care determină mişcarea oscilatorie armonică

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx \tag{2.51}$$

printr-un segment de dreaptă tangent la parabolă. Forța se anulează în punctul minim al curbei energiei potențiale (fig.2.10).

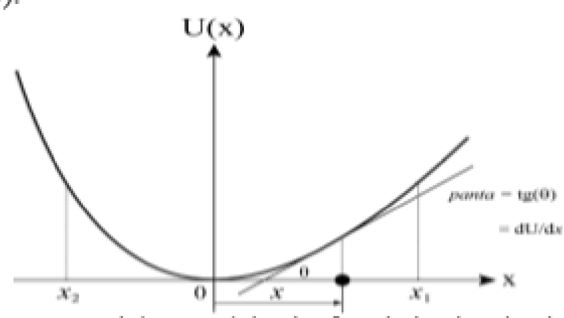


**Fig.2.10** Dependența energiei potențiale şi a forței elastice de elongație în mişcarea oscilatorie armonică.

### 3.1 Oscilații amortizate

Un sistem real aflat în mişcarea oscilatorie întâmpină o anumită rezistență din partea mediului în care oscilează ⇒ efectuează ***oscilații amortizate*** = amplitudinea lor scade până la dispariție o data cu trecerea timpului. Ele sunt determinate de *acțiunea simultană a forței elastice şi a forței de frecare.*

Fig.3.1 prezintă un oscilator care execută o oscilații amortizate sub acțiunea forței elastice $F_e = -kx$ şi a forței de frecare cu mediul $F_{f_r} = -\gamma v$ (***k*= constanta elastică a resortului** , ***γ*= coeficientul de frecare vâscoasă al mediului**).

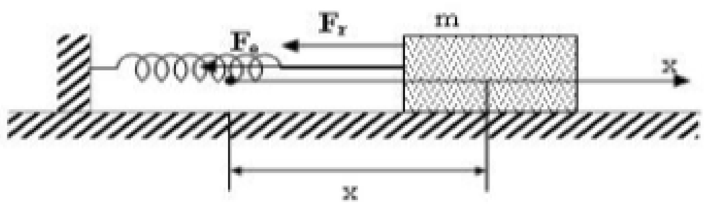


**Fig.3.1** Oscilații amortizate.

Ecuația mişcării amortizate este

$$F = F_e + F_{f_r} \tag{3.1}$$

adică

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \tag{3.2}$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.3}$$

unde $\delta = \frac{\gamma}{2m}$ ***- coeficientul de amortizare***

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ***- pătratul frecvenței unghiulare proprii oscilatorului***

Căutăm soluția ecuației (3.3) de forma

$$x = Ce^{\lambda t} \tag{3.4}$$

care, pentru $\lambda$ imaginar, este o combinație de funcții armonice. Înlocuim (3.4) în (3.3) şi obținem

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \varpi_0^{\ 2} = 0 \tag{3.5}$$

numită ***ecuația caracteristică*** a ecuației diferențiale (3.3). Ea admite soluțiile

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \varpi^2} = -\delta \pm i\sqrt{\varpi_0^{\ 2} - \delta^2} \tag{3.6}$$

Considerăm soluția ecuației (3.3) de forma

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3.7}$$

care ne conduce la

$$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \tag{3.8}$$

unde

$$\varpi = \sqrt{\varpi_0^{\ 2} - \delta^2} \qquad (3.9)$$

care este ***pulsația oscilatorului amortizat***.

**<u>Obs.importantă</u>**: soluția (3.8) descrie o *mişcare oscilatorie* numai pentru $\varpi_0^{\ 2} - \delta^2 \geq 0$.

(pentru $\varpi_0^{\ 2} - \delta^2 < 0$ descrie o *mişcarea aperiodică amortizată*).

Cu ajutorul formulei lui Euler ( $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ) relația (3.8) se scrie

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\varpi t + \varphi) \qquad (3.10)$$

unde

$$A(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t} \qquad (3.11)$$

unde - ***A(t)= amplitudinea oscilatorului amortizat*** (dependentă de timp)

- **$A_0$ = amplitudinea inițială a oscilatorului** (la $t = 0 \rightarrow A(0) = A_0$).

Dacă forța de frecare este mică, (3.11) descrie o mişcare periodică cu amplitudine descrescătoare în timp (fig.3.2).

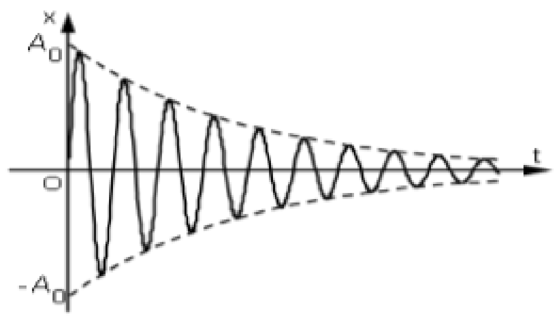


**Fig.3.2** Oscilații amortizate.

Când creşte coeficientul de frecare al mediului ($\gamma$) $\Rightarrow$ creşte coeficientul de amorizare ($\delta$) $\Rightarrow$ amortizarea devine mai puternică. Rata amortizării este exprimată prin logaritmul natural al raportului $\dfrac{A(t)}{A(t+T)}$, şi se numeşte ***decrementul logaritmic al amortizării***

$$\Delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T \qquad (3.12)$$

Din (3.9) rezultă că amortizarea oscilațiilor modifică perioada acestora

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\gamma^2}{4mk}}} \qquad (3.13)$$

unde $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ - ***perioada proprie a oscilatorului***.

Dacă $\vec{F}_f$ creşte $\Rightarrow$ $T$ creşte până când se ajunge la $\dfrac{\gamma^2}{4m} = 1$ unde oscilațiile încetează.

Energia oscilațiilor amortizate este

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^{\ 2} e^{-2\delta \cdot t} = E_0 e^{-2\delta \cdot t} \qquad (3.14)$$

unde $E_0$ = energia inițială. Energia oscilațiilor amortizate scade exponențial în timp.

***Funcția de disipație*** sau ***factorul de calitate*** al unui oscilator amortizat se definește

$$Q = \frac{1}{2}\gamma \cdot v^2 \tag{3.15}$$

Este o mărime adimensională cu proprietățile:

-derivata ei în raport cu viteza este egală cu forța de frecare luată cu semn schimbat

$$F_{fr} = -\frac{dQ}{dv} = -\gamma \cdot v \tag{3.16}$$

-puterea disipată este egală cu dublul funcției de disipație

$$-\frac{dE}{dt} = 2Q = \gamma \cdot v^2 \tag{3.17}$$

Oscilatorul este cu atât mai ”*bun*” (adică va avea un $Q$ mai mare, oscilează un timp mai îndelungat) cu cât $\delta$ , respectiv $\gamma$ , sunt mai mici.

### 3.2Oscilații forțate

Pentru a întreține oscilațiile care datorită frecării cu mediul se amortizează, se aplică oscilatorului (fig.3.3) o forță periodică externă, $F_p(t)$

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{3.18}$$

unde $\omega$ = ***pulsația forței exterioare***

$F_0$ = ***valoare maximă a forței exterioare***.

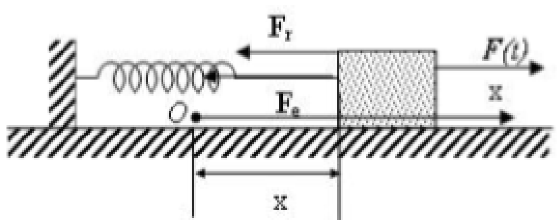


**Fig.3.3** Oscilații forțate.

Ecuația de mişcare pentru oscilatorul forțat este

$$F = F_e + F_{fr} + F(t) \tag{3.19}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \tag{3.22}$$

Ecuația (3.22) reprezintă ***ecuația de mişcare a oscilațiilor forțate*** ( ***oscilațiilor intreținute***) deoarece acțiunea forței periodice exterioare asupra oscilatorului împiedică „stingerea” oscilațiilor acestuia, cu alte cuvinte „le intreține”.

Soluția căutată pentru ecuație diferențială (3.22) este de forma (3.10). Prin înlocuirea expresiei (3.11) în ecuația de mişcare (3.22) şi prin egalarea coeficienților lui $\sin \omega t$ , respectiv $\cos \omega t$ , din membrul stâng şi membrul drept al ecuației se obține un sistem de două ecuații a cărui rezolvare conduce la expresiile pentru A şi φ

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \tag{3.23}$$

şi

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \qquad (3.24)$$

***Fenomenul de rezonanță*** *= transferul de energie dinspre sistemul exterior (forța periodică) înspre oscilator se face cu randament maxim, iar energia și amplitudinea oscilatorului devin maxime.*

Pentru a afla care este pulsația forței exterioare la rezonanță se ține cont ca $E \sim A^2$ (se demonstrează mai târziu) şi se impune condiția $\frac{dA}{d\omega} = 0$ de unde

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad (3.25)$$

unde $\omega_{rez}$ = ***frecvența de rezonanță*** (se apropie cu atât mai mult de frecvența proprie de oscilație cu cât coeficientul de atenuare, $\delta$, este mai mic).

Fig.3.4 prezintă curbele de variație a amplitudinii pentru diferite valori ale pulsației $\varpi$ şi ale coeficientului de amortizare $\delta$ (conform (3.23)). Se observă că la scăderea rezistenței mecanice a mediului în care au loc oscilațiile forțate amplitudinea acestora crește.

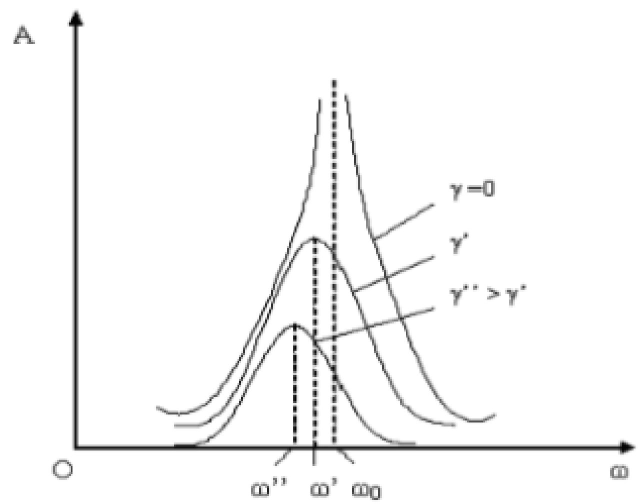


**Fig.3.4** Variația amplitudinii în funcție de pulsația $\omega$ şi de coeficientul de amortizare $\delta$.

Efectul de rezonanță devine mai accentuat atunci când coeficientului de amortizare δ (respectiv coeficientul de frecare $\gamma$) descrește deoarece A crește.

La rezonanță, când nu există frecare ($\gamma = 0$), amplitudinea oscilatorului tinde spre infinit, iar sistemul se poate distruge ⇒ atentie la proiectare în domeniul ingineriei mecanice sau al ingineriei construcțiilor. Pe de altă parte, deoarece la rezonanță transferul de energie dinspre exterior înspre sistemul oscilant se face cu randament maxim, rezonanța este dorită în domeniul electronicii (circuitele oscilante se acordează la rezonanță pentru ca pierderile de semnal să fie minime).

Menționă următoarele proprietăți ale oscilațiilor forțate:

- frecvența oscilațiilor forțate este egală cu frecvența forței externe.
- amplitudinea și defazajul oscilațiilor forțate depind de structura sistemului mecanic ce oscilează ($k$, $m$) şi de frecvența a forței externe, și nu depind de condițiile inițiale.

După începerea acțiunii forței exterioare asupra oscilatorului întreținut urmeză *regimul tranzitoriu* (oscilatorul încă mai oscilează cu frecvența proprie), iar după un timp *regimul permanent* (oscilatorul începe să oscileze cu pulsația forței externe).