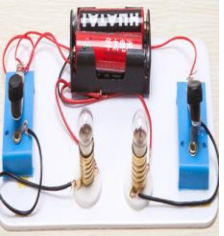
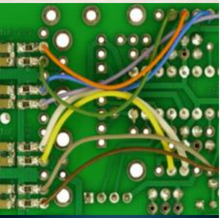
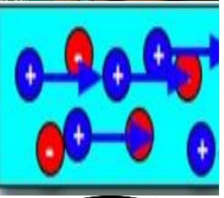
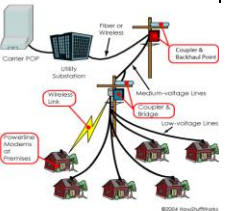





Electricitate II

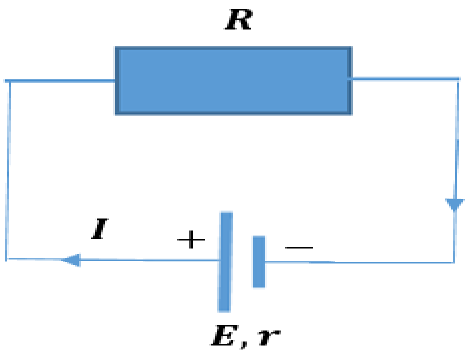
Circuitul electric. Legile circuitului electric.

Valerica Baban, www.quarq.ro

Sumar

- Circuitul electric simplu
- Legile lui Ohm
- Legile lui Kirchhoff
- Gruparea rezistorilor
- Transformarea stea-triunghi
- Gruparea generatoarelor

Circuitul electric simplu.Legea lui Ohm



Cel mai simplu circuit electric de current continuu (cc) este format dintr-un generator electric , un consumator și fire conductoare.

Generatorul electric este caracterizat de tensiunea electromotoare E și rezistență internă r. Un generator ideal are rezistența internă zero $r = 0$.

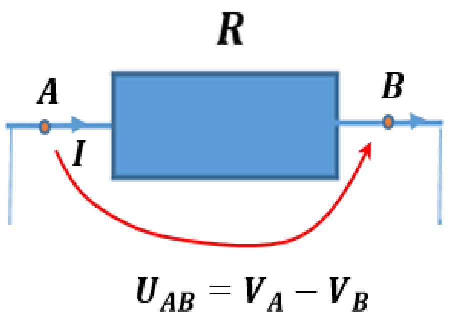
Consumatorul este caracterizat de rezistența electrică R. In multe situații rezistența firelor de legătură se neglijează. Comportarea consumatorului este descrisă de relația care leagă intensitatea curentului care îl parcurge de tensiunea la borne $I = f(U)$ numită caracteristică curent-tensiune.
Pentru o largă categorie de consumatori, conductori metalici, etc este valabilă relația:

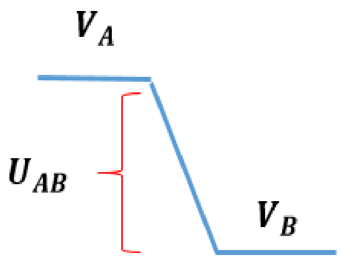
$$I = \frac{U}{R} \quad , R - rezistența\ consumatorului$$

care mai este numită și legea lui Ohm pe porțiunea de circuit care conține consumatorul respectiv.

Elementele de circuit care respectă legea lui Ohm sunt numite generic **rezistoare** si au simbolurile de mai jos.
In cele mai multe situații consumatorii respectă aproximativ legea lui Ohm. Un consumator care respectă riguros legea lui Ohm se numesc rezistori ideali.

Exemplu

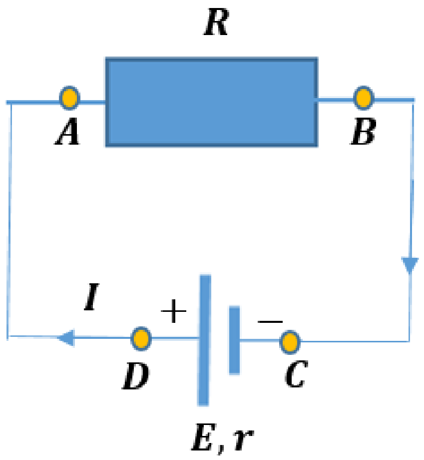


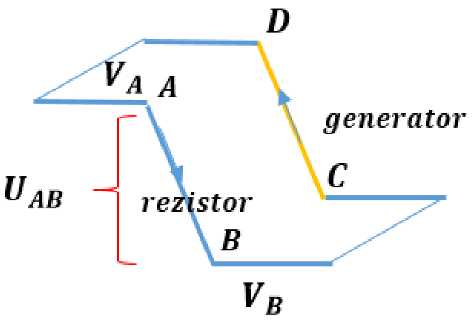


Considerând o porțiune de circuit pentru care $R = 2\Omega, I = 1A$ tensiunea la bornele rezistorului va fi:

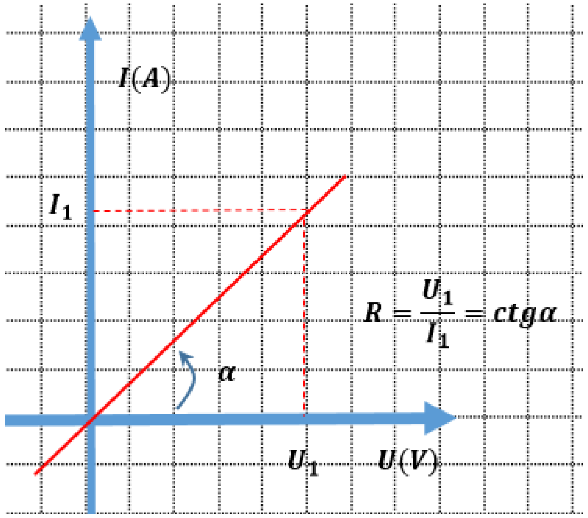
$$U_{AB} = RI = 2V$$
$$U_{AB} = V_A - V_B = 2V$$

<u>Tensiunea la borne</u> echivalentă cu <u>diferența de potențial la borne</u> indică scăderea potențialului de la valoarea V_A la V_B.



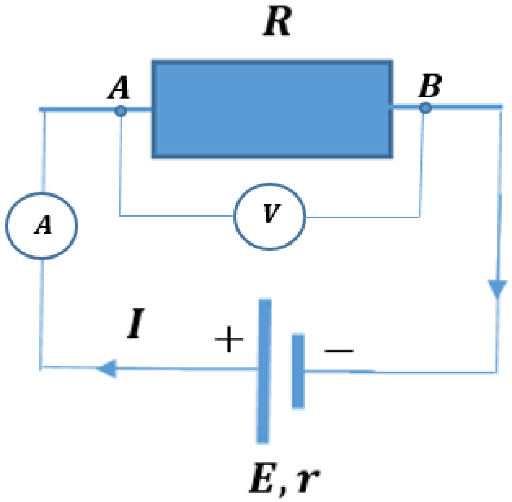


Rolul generatorului electric este de aduce din nou potențialul de la valoarea $V_B = V_C$ la valoarea $V_A = V_D$.



Pentru un rezistor care respectă legea lui Ohm intensitatea curentului depinde liniar de tensiune. Dacă avem un grafic $I = f(U)$ se poate afla rezistența corespunzătoare.

Legea lui Ohm pe tot circuitul

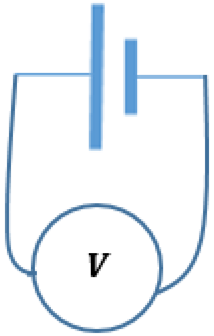


$$I = \frac{E}{R+r} = \frac{tensiunea\ electromotoare}{rezistența\ totală}$$

Intensitatea curentului este măsurată cu <u>ampermetrul</u> care se leagă în serie în circuit. Un ampermetru ideal are rezistența proprie zero $R_A = 0$. În realitate orice ampermetru are o rezistența mică dar diferită de zero. Dacă nu se precizează altfel în probleme, ampermetrul se consideră ideal.

Tensiunea la bornele unui element de circuit este măsurată cu <u>voltmentrul</u> care se leagă în paralel în circuit. Un voltmetru ideal are rezistența proprie infinită $R_V = \infty$. În realitate orice voltmetru are o rezistența f. mare dar nu infinită. Dacă nu se precizează altfel în probleme, voltmetrul se consideră ideal.

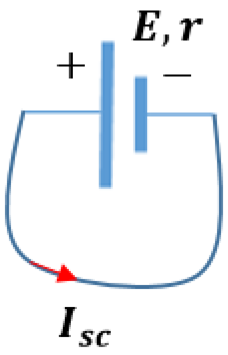
Funcționarea în gol = circuitul exterior nu există ($R = \infty$)



$$R = \infty$$
$$I = \frac{E}{\infty} = 0$$

Un voltmetru ideal legat la bornele unui generator fără circuit exterior indică E.
$U = E$ (voltmetrul măsoară t.e.m)

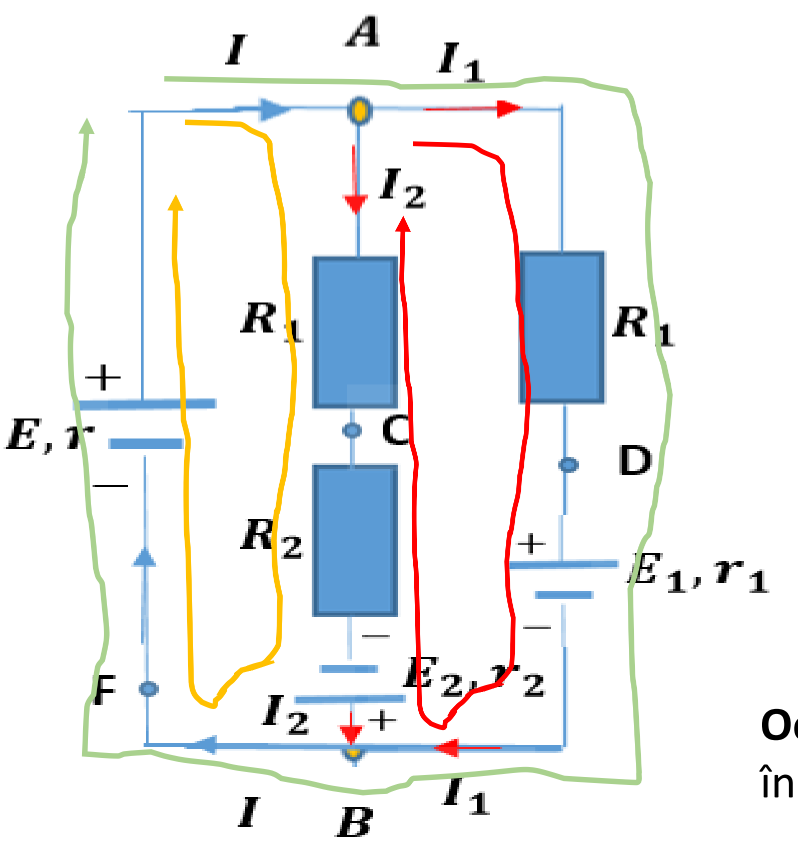
Scurtcircuit = rezistența exterioară zero ($R = 0$)



$$R = 0$$
$$\boldsymbol{I_{sc}} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{r}} \ll \frac{E}{R+r}$$

Intensitatea curentului de scurtcircuit

Legile lui Kirchhoff



Legile lui Kirhhoff sunt aplicabile în situația în care avem circuite ramificate

Nod = punctul din circuit în care se întâlnesc cel puțin 3 conductori. Exemple: A, B. **Nu** sunt noduri punctele C, D, F.

Ramură = porțiunea din circuit cuprinsă între 2 noduri succesive. Exemple: ADB, ACB, AFB.

Ochi = succesiune de noduri și ramuri care începe într-un punct și se termină în același punct. Exemple: **ADBCA**, **ACBFA**, **ADBFA**

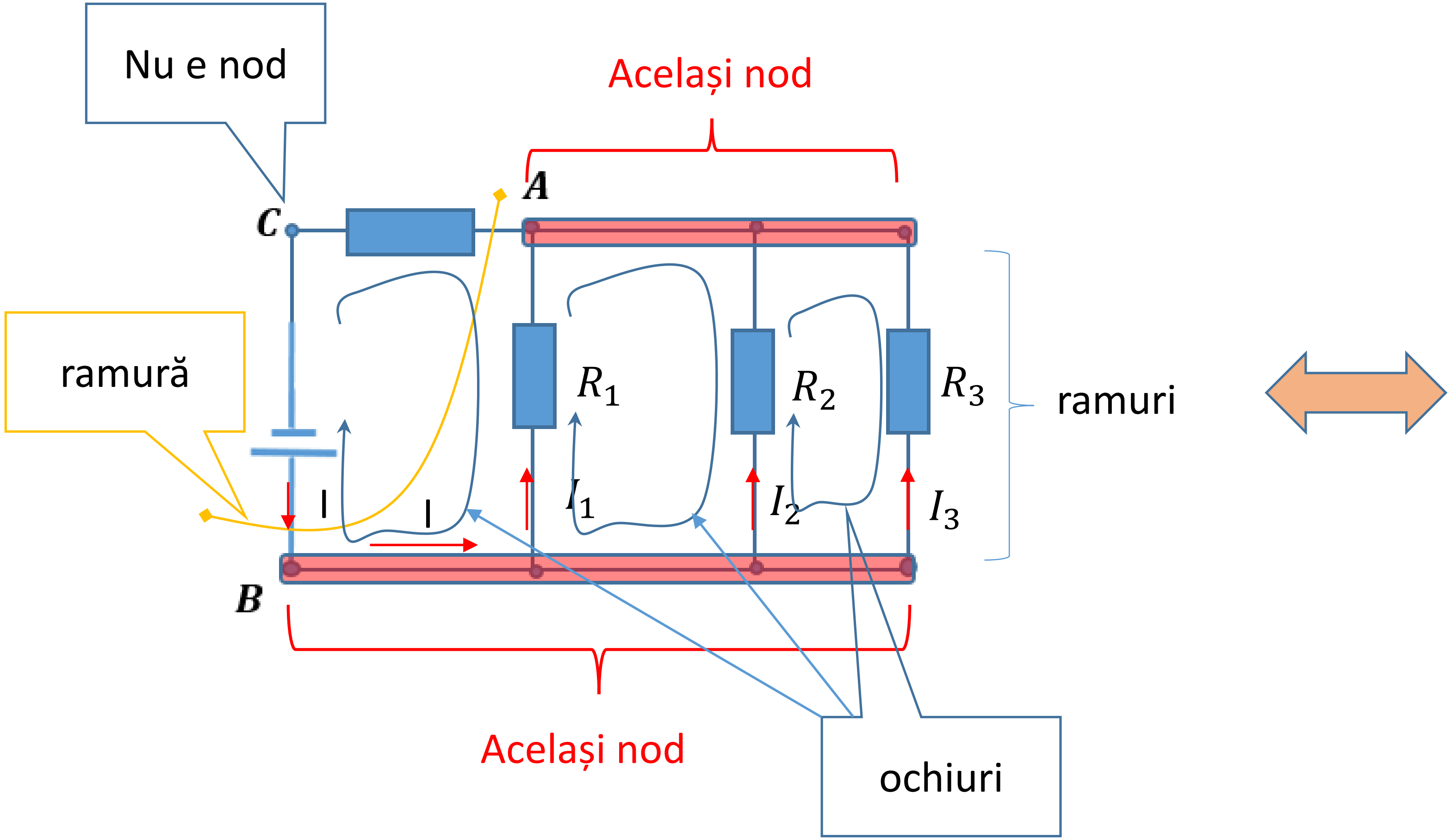
Legea I - se aplică nodurilor

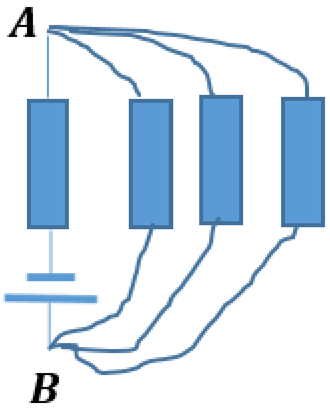
Suma intesităților curenților care intră într-un nod este egală cu suma intensităților curenților care ies din nod. (sau suma algebrică a intensităților curenților este zero – se stabileste prin convenție că intensitățile curenților care intră sunt luate cu ,, + ,,și intensitățile curenților care ies sunt luate cu ,, - ,, .)

Exemple: **nodul A** $I = I_1 + I_2$ **nodul B** $I_1 + I_2 = I$, ceea ce este același lucru.

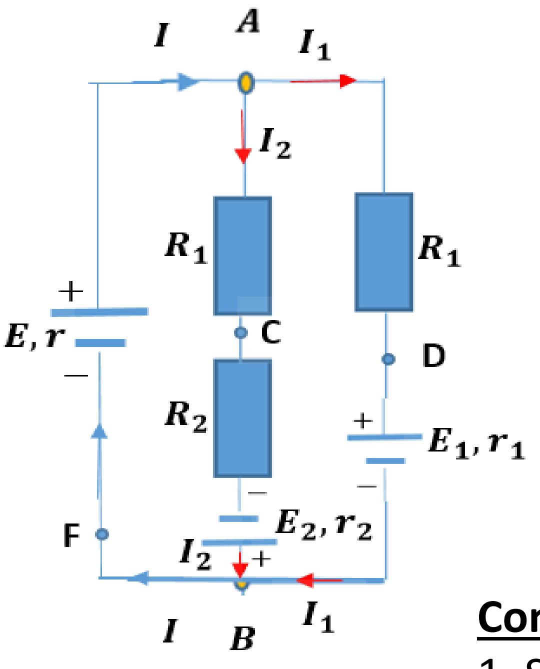
De aceea în cazul rezolvării circuitelor electrice dacă într-un circuit avem N noduri se pot scrie doar N-1 ecuații independente.

Noduri – ramuri - ochiuri





Desen echivalent



Legile lui Kirchhoff

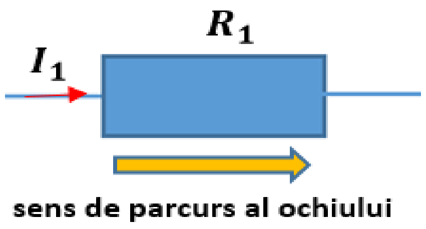
Legea II - se aplică ochiurilor de rețea
Suma algebrică a produselor dintre rezistența electrică și intensitatea curentului pe un ochi de rețea este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare.

$$\sum_i R_i I_i = \sum_k E_k$$

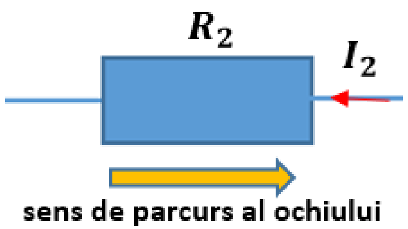
<u>Convenții</u>

1. Se alege un sens de parcurs al ochiului. Alegerea este arbitrară.

2. Dacă rezistorii (inclusiv resitențele interne ale generatoarelor) sunt parcurși de curent în același sens cu sensul arbitrar ales produsul IR se consideră (+) altfel se consideră (-).

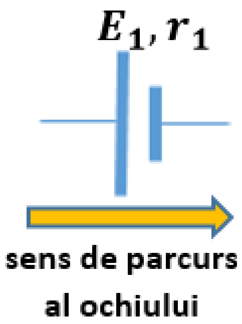


$+I_1R_1$

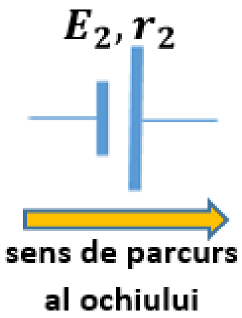


$-I_2R_2$

3. Dacă generatorul este parcurs de sensul arbitrar ales de la borna (-) la (+) atunci t.e.m se consideră pozitivă altfel se consideră invers.

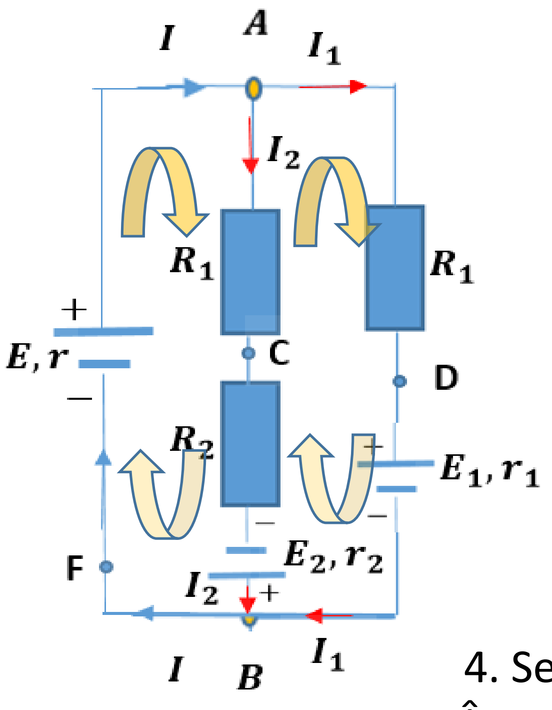


$-E_1$



$+E_2$

Algoritmul de aplicare a legilor lui Kirchhoff



Se consideră circuitul din figură pentru care se cunosc valorile rezistențelor și t.e.m.
Se cere să se determine valorile intensităților curenților pe fiecare ramură.

1. Se analizează circuitul și se desenează intensitățile curenților pe fiecare ramură.
2. Pe <u>o ramură avem o singură intensitate a curentului indiferent de câte generatoare avem.</u> În cazul în care pe o ramură sunt mai multe generatoare și nu este foarte clar care ar fi sensul curentului se alege arbitrar un sens urmând ca din calculele ulterioare să se stabilească dacă sensul ales este corect.
3. In cazul circuitului nostru sunt de aflat 3 intensități ale curenților, <u>deci avem nevoie de 3 ecuații .</u>

4. Se numără nodurile.
În cazul nostru sunt 2 noduri A și B. Avem 2 ecuații pentru noduri din care o ecuație e independentă și se poate folosi.

$$A: \quad I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

5. Se completează cu restul de ecuații folosind legea a II-a a lui Kirchhoff pentru ochiuri. Se aleg două ochiuri și sensuri de parcurs ale acestora (vezi figura).

$$I_1(R_1 + r_1) - I_2(r_2 + R_2 + R_1) = -E_1 - E_2 \quad (2)$$

$$+I_2(r_2 + R_2 + R_1) + Ir = E + E_2 \quad (3)$$

Algoritmul de aplicare a legilor lui Kirchhoff

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \quad (1) \\ I_1(R_1 + r_1) - I_2(r_2 + R_2 + R_1) = -E_1 - E_2 \quad (2) \\ +I_2(r_2 + R_2 + R_1) + Ir = E + E_2 \quad (3) \end{cases}$$

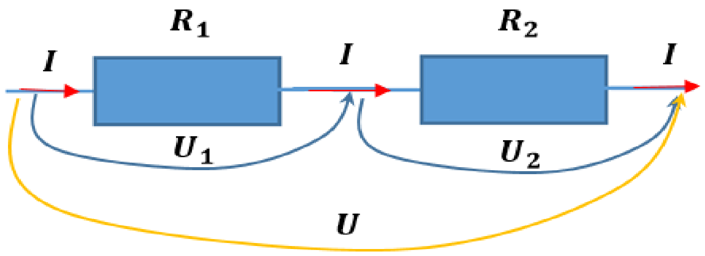
Se trece la înlocuirea valorilor numerice corespunzătoare:

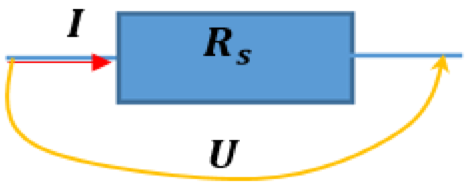
$Aplicație\ numerică$: $R_1 = 5\ \Omega, R_2 = 9\ \Omega, r = 1\Omega, E = 20V, E_1 = E_2 = 10V$

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ 6I_1 - 15I_2 = -20 \\ 15I_2 + I = 30 \end{cases}$$

Se rezolvă sistemul.
Dacă valorile numerice obținute pentru anumiți curenți sunt negative înseamnă că sensul curentului este invers celui presupus inițial.Valoarea este corectă dar sensul este invers celui presupus.
Se mai desenează odată circuitul cu sensurile curenților corecte.

Gruparea rezistorilor



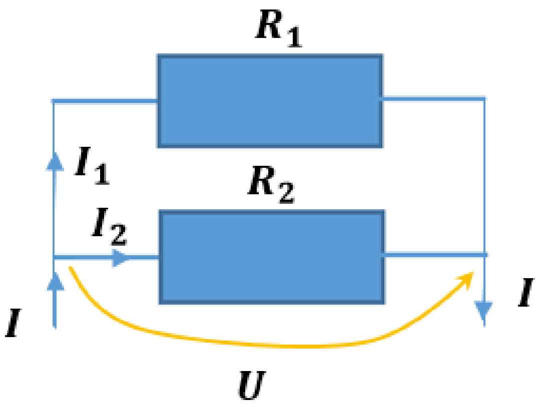


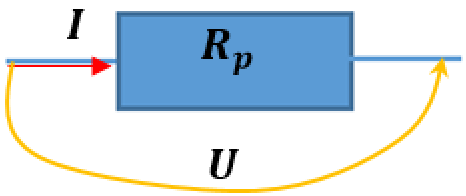
Gruparea serie

rezitorii sunt parcurși de același curent, nu există noduri sau alte ramificații ale rețelei.

$$U = U_1 + U_2 = IR_1 + IR_2 = IR_s$$

$R_s = R_1 + R_2$ se generalizează $\boldsymbol{R_s = R_1 + R_2 + \cdots}$





Gruparea paralel

rezitorii sunt parcurși de curenți diferiți (dacă au rezitențe diferite), dar au la borne aceași tensiune.

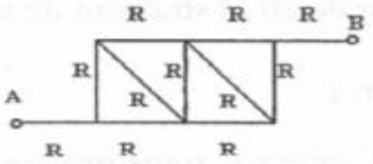
$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_p}$$

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_p}$ se generalizează $\boldsymbol{\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots}$

Trasformarea stea-triunghi

<u>Problemă dată la admitere la Polithenică în 2015</u>

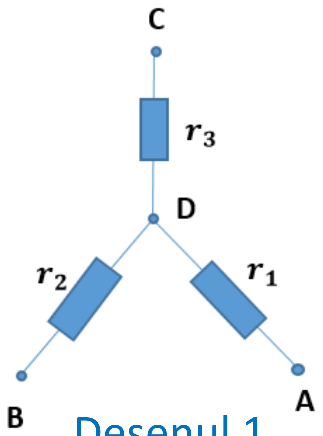
11. Cele 11 laturi ale circuitului electric din figură au fiecare rezistența R=22 Ω. Rezistența echivalentă între bornele A și B este: **(5 pct.)**



a) 33 Ω; b) 72 Ω; c) 39,4 Ω; d) 74 Ω; e) 154 Ω; f) 81 Ω.

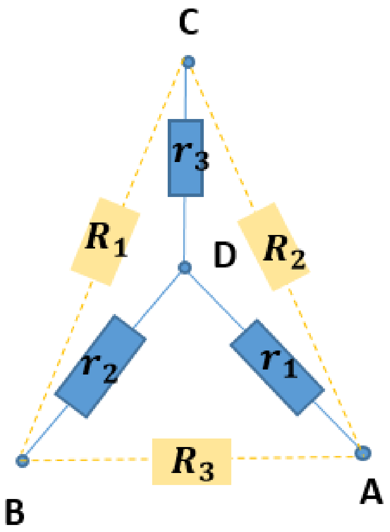
Rezolvarea acestei probleme poate fi făcută prin considerente de simetrie a rețelei (potențialele în anumite puncte sunt egale) dar mai bine (dacă nu îți dai seama în ce puncte potențialele sunt egale!) utilizând așa numita **transformare stea-triunghi**.

În multe alte situații nu putem vorbi nici de grupare serie nici paralel nici mixtă între cele două.
De exemplu într-o rețea complexă delimităm următoare gruparea din desenul 1.
Aceasta se numește **<u>grupare stea (configurație stea)</u>**.



Desenul 1

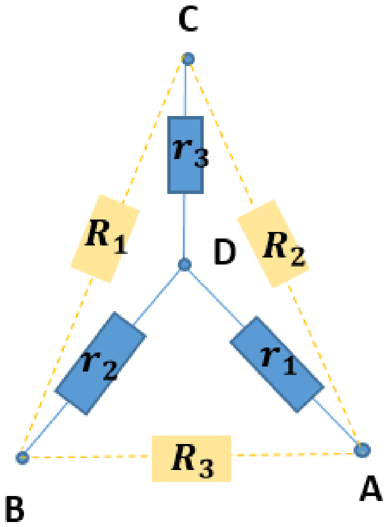
Această grupare poate fi înlocuită de **<u>gruparea triunghi (configurație triunghi)</u>** desenul 2.



Desenul 2

Trasformarea stea-triunghi

Transformarea este reciprocă adică putem trece de la stea la triunghi și inversă. Scopul acestei transformări este simplificarea ploblemelor. Se demostrează următoarele relații de echivalență.



De la stea la triunghi

$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1}$$

$$R_2 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_2}$$

$$R_3 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_3}$$

De la triunghi la stea

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Cum ținem minte aceste relații?!! In principiu nu ar trebui să le ținem minte. Dar la examene ...

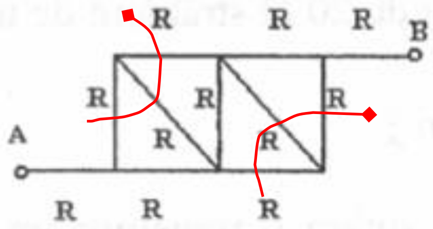
- ✓ Urmăriți desenul și observați dispunerea rezistorilor, notațiile nu sunt întâmplătoare.

R_1 este opus lui r_1 și este între r_2 și r_3 . La fel ceilalți rezitori.

- ✓ Pe de altă parte relațiile de mai sus au o anumită simetrie.
- ✓ Trebuie să tineți minte doar una din cele două categorii.

Rezolvarea problemei

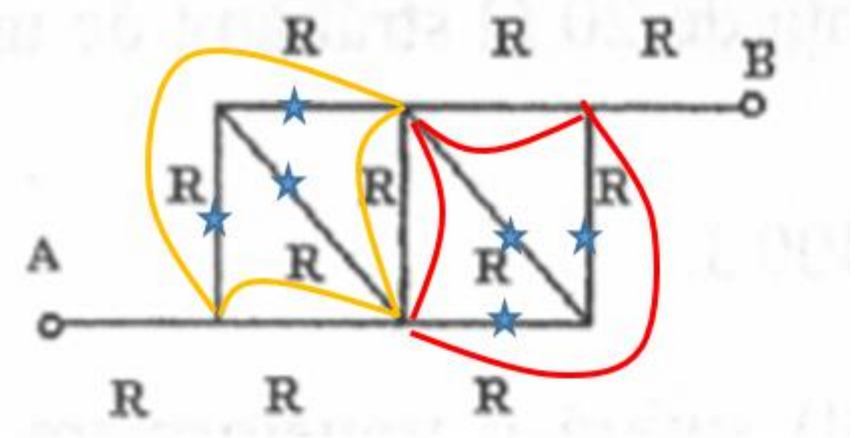
Cele 11 laturi ale circuitului electric din figură au fiecare rezistența R=22 Ω. Rezistența echivalentă între bornele A și B este: **(5 pct.)**



Una din posibilități.
Se poate vedea că zonele înconjurate sunt configurații stea. Se pot înlocui rezistorii marcați cu ★
Cu rezitorii desenați cu linii roșii și galbene și care conform calculelor de mai jos au fiecare valoarea rezistenței 3R

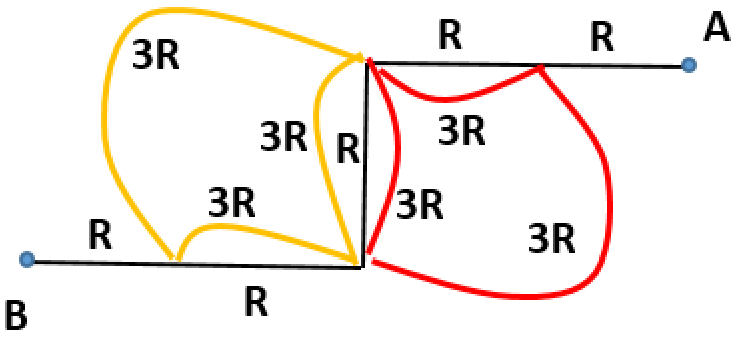
$$R_1 = \frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1}$$ la noi $r_1 = r_2 = r_3 = R$ și $R_1 = r_1$

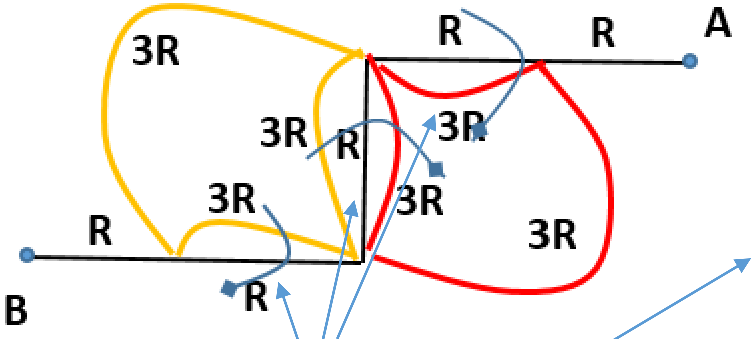
$$R_1 = \frac{RR + RR + RR}{R} = \frac{3R^2}{R} = 3R = R_2 = R_3$$



Rezolvarea problemei

Noul desen este cel alăturat



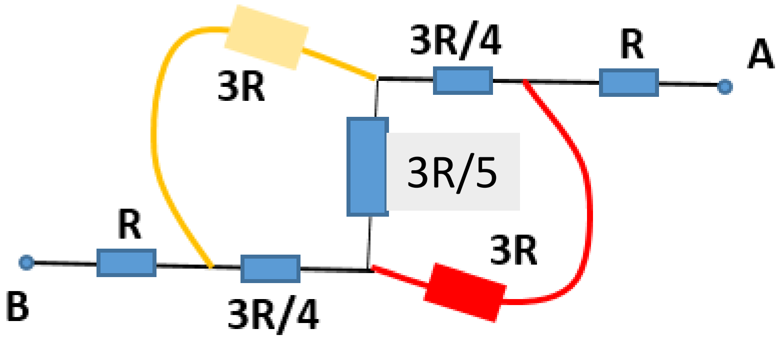


Grupări paralel

$$\frac{1}{R_{p1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R} \qquad R_{p1} = \frac{3R}{4}$$

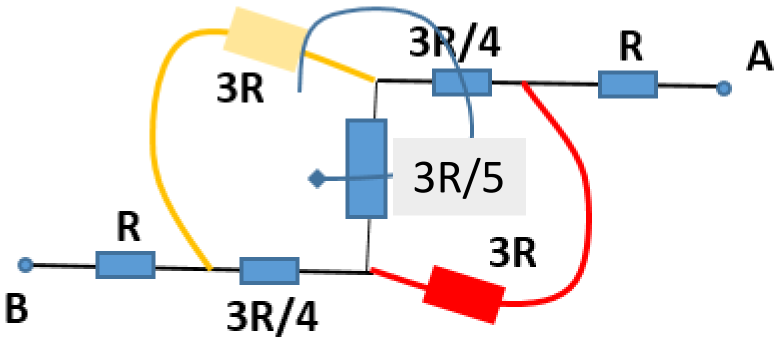
$$\frac{1}{R_{p2}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{5}{3R} \qquad R_{p2} = \frac{3R}{5}$$

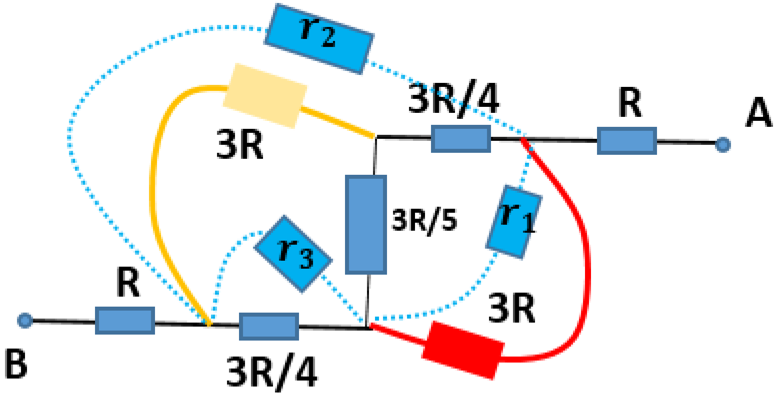
Gruparea echivalentă



Rezolvarea problemei

Facem o altă tranfigurare stea-triunghi



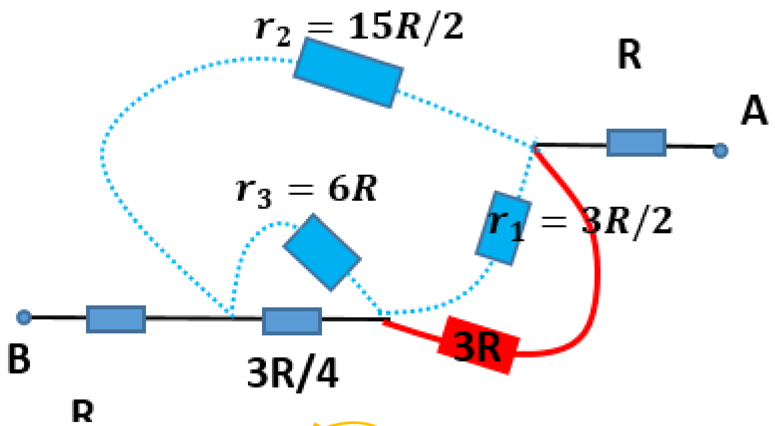


$$r_1 = \frac{3R\frac{3R}{4} + 3R\frac{3R}{5} + \frac{3R}{5}\frac{3R}{4}}{3R} = \frac{\frac{9R^2}{4} + \frac{9R^2}{5} + \frac{9R^2}{20}}{3R} = \frac{3R}{4} + \frac{3R}{5} + \frac{3R}{20} = \frac{15R + 12R + 3R}{20} = \frac{3R}{2}$$

$$r_2 = \frac{3R\frac{3R}{4} + 3R\frac{3R}{5} + \frac{3R}{5}\frac{3R}{4}}{\frac{3R}{5}} = \frac{\frac{9R^2}{2}}{\frac{3R}{5}} = \frac{9R^2}{2}\frac{5}{3R} = \frac{15R}{2}$$

$$r_3 = \frac{3R\frac{3R}{4} + 3R\frac{3R}{5} + \frac{3R}{5}\frac{3R}{4}}{\frac{3R}{4}} = \frac{9R^2}{2}\frac{4}{3R} = 6R$$

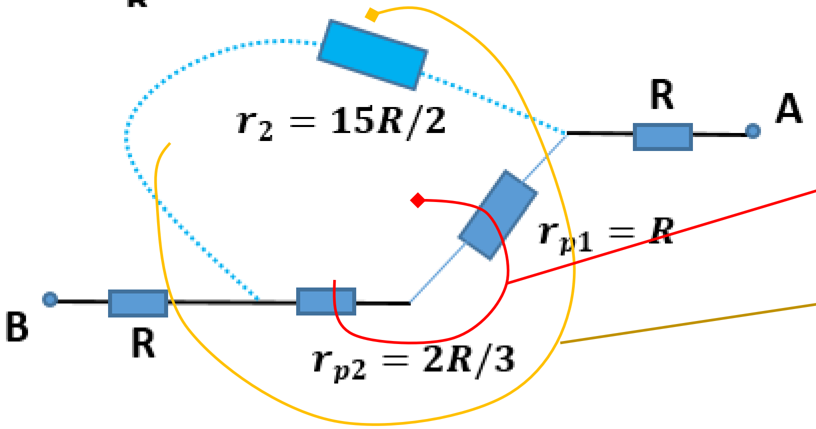
Rezolvarea problemei



Grupările paralel

$$\frac{1}{r_{p1}} = \frac{1}{3R} + \frac{2}{3R} = \frac{3}{3R} \rightarrow r_{p1} = R$$

$$\frac{1}{r_{p2}} = \frac{4}{3R} + \frac{1}{6R} = \frac{9}{6R} \rightarrow r_{p2} = \frac{2R}{3}$$



$$R_{s1} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5R}{3}$$

$$\frac{1}{R_{p1}} = \frac{2}{15R} + \frac{3}{5R} = \frac{2+9}{15R} \rightarrow R_{p1} = \frac{15R}{11}$$

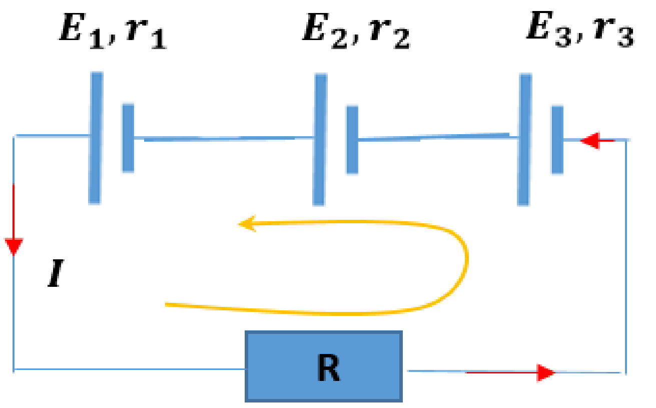
$$R_{final} = R + \frac{15R}{11} + R = 2R + \frac{15R}{11} = 44\Omega + 30\Omega = 74\Omega$$

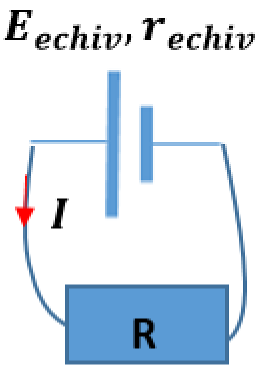
Răspunsul d)

Gruparea generatoarelor

Serie

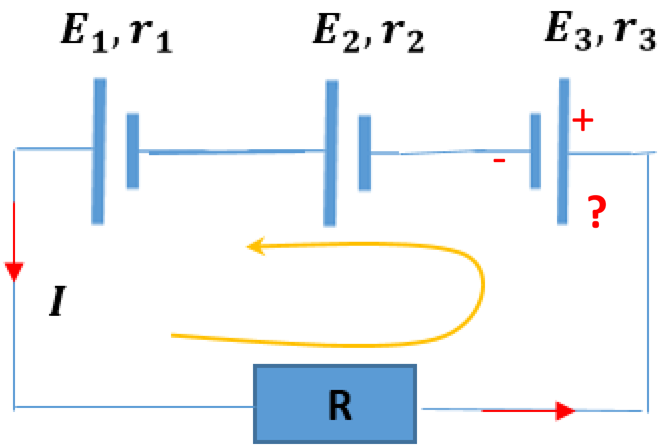
A)





$$\begin{cases} I(R + r_1 + r_2 + r_3) = E_1 + E_2 + E_3 \\ I = \dfrac{E_1 + E_2 + E_3}{R + r_1 + r_2 + r_3} = \dfrac{E_{echiv}}{R + r_{echiv}} \\ E_{echiv} = E_1 + E_2 + E_3\,,\ r_{echiv} = r_1 + r_2 + r_3 \end{cases}$$

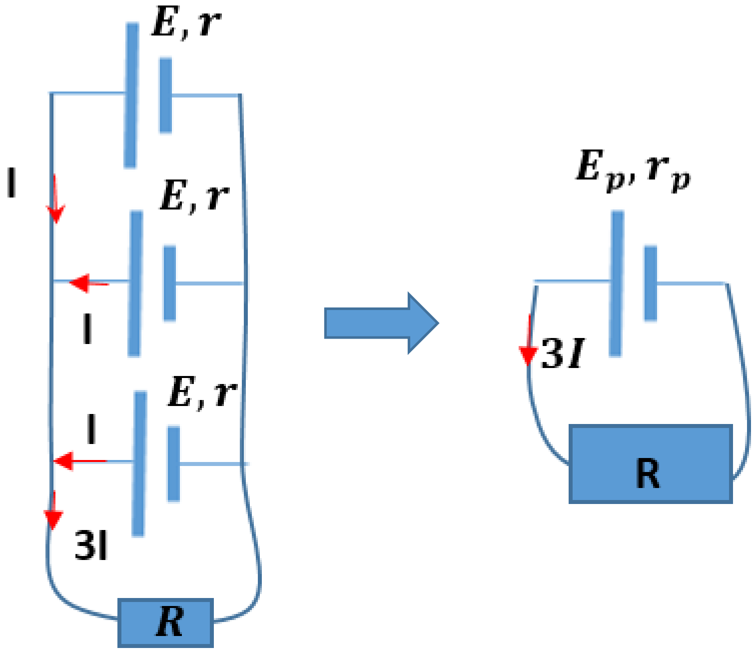
B)



$$\begin{cases} I(R + r_1 + r_2 + r_3) = E_1 + E_2 - E_3 \\ I = \dfrac{E_1 + E_2 - E_3}{R + r_1 + r_2 + r_3} = \dfrac{E_{echiv}}{R + r_{echiv}} \\ E_{echiv} = E_1 + E_2 - E_3\,,\ r_{echiv} = r_1 + r_2 + r_3 \end{cases}$$

Gruparea generatoarelor

Paralel – generatoare identice



Generatorul echivalent are t.e.m a unui singur generator
Și rezistența echivalentă a grupării paralele a unui număr n
de generatoare identice (câte sunt legate în paralel).

$$E_p = E$$

$$\frac{1}{r_p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \cdots = \frac{n}{r} \rightarrow \boldsymbol{r_p} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{n}}$$

n – nr. de generatoare